



Lineare Algebra (Informatik) Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (Gram-Schmidt-Verfahren)

Betrachten Sie die Basis

$$\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

von $\mathbb{R}^3$. Wenden Sie den Gram-Schmidt Orthonormalisierungsverfahren auf $\mathcal{B}$ an, um eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ zu erhalten.

Lösung 1 Wir wenden den erweiterten Gram-Schmidt-Verfahren an.

$$b'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b_1 = \frac{b'_1}{\|b'_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} b'_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle b_1, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle b_1 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$b_2 = \frac{b'_2}{\|b'_2\|} = \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} b'_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \left\langle b_1, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle b_1 - \left\langle b_2, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle b_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$b_3 = \frac{b'_3}{\|b'_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alternativ hätten wir zuerst den Gram-Schmidt Orthogonalisierungsverfahren anwenden können und anschließend die erhaltenen Vektoren normalisiert.

Aufgabe 2 (Skalarprodukt, Orthonormalsystem)

Es sei $V := \{p : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$.

(i) Zeigen Sie, dass V mit

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, (p, q) \mapsto p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

zu einem $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt wird (d.h. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist bilinear, symmetrisch und positiv definit).

(ii) Orthonormalisieren Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren die Elemente

$$p_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n$$

mit $n = 0, 1, 2$ in $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Lösung 2

(i) Bilinearität: Seien $p, p', q, q' \in V, \lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \langle p, q + q' \rangle &= p(-1)(q + q')(-1) + p(0)(q + q')(0) + p(1)(q + q')(1) \\ &= p(-1)(q(-1) + q'(-1)) + p(0)(q(0) + q'(0)) + p(1)(q(1) + q'(1)) \\ &= p(-1)q(-1) + p(-1)q'(-1) + p(0)q(0) + p(0)q'(0) + p(1)q(1) + p(1)q'(1) \\ &= (p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)) + (p(-1)q'(-1) + p(0)q'(0) + p(1)q'(1)) \\ &= \langle p, q \rangle + \langle p, q' \rangle. \end{aligned}$$

Analog zeigt man, dass $\langle p + p', q \rangle = \langle p, q \rangle + \langle p', q \rangle$.

$$\begin{aligned} \langle \lambda p, q \rangle &= (\lambda p)(-1)q(-1) + (\lambda p)(0)q(0) + (\lambda p)(1)q(1) \\ &= \lambda \cdot p(-1)q(-1) + \lambda \cdot p(0)q(0) + \lambda \cdot p(1)q(1) \\ &= \lambda \cdot (p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)) \\ &= \lambda \cdot \langle p, q \rangle. \end{aligned}$$

Analog zeigt man, dass $\langle p, \lambda q \rangle = \lambda \langle p, q \rangle$.

Symmetrie: Seien $p, q \in V$

$$\begin{aligned} \langle p, q \rangle &= p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) \\ &= q(-1)p(-1) + q(0)p(0) + q(1)p(1) \\ &= \langle q, p \rangle. \end{aligned}$$

Positiv Definitheit: Sei $p \in V$

$$\langle p, p \rangle = p(-1)^2 + p(0)^2 + p(1)^2 \geq 0$$

ist klar. Zudem gilt

$$\begin{aligned} \langle p, p \rangle &= p(-1)^2 + p(0)^2 + p(1)^2 = 0 \\ \iff p(-1) &= 0 \wedge p(0) = 0 \wedge p(1) = 0 \\ \iff p &= 0, \end{aligned}$$

da

$$\begin{aligned} p(-1) &= a_2 - a_1 + a_0 = 0 \\ \wedge \quad p(0) &= a_0 = 0 \\ \wedge \quad p(1) &= a_2 + a_1 + a_0 = 0 \\ \implies a_1 &= -a_1 = 0 = a_2. \end{aligned}$$

- (ii) Wir wenden zuerst den Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren an, um eine Orthogonalbasis $\{q_0, q_1, q_2\} \in V$ zu erhalten:

$$q_0 = p_0 \tag{1}$$

$$q_1 = p_1 - \frac{\langle p_1, q_0 \rangle}{\langle q_0, q_0 \rangle} q_0 \tag{2}$$

$$q_2 = p_2 - \frac{\langle p_2, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle} q_1 - \frac{\langle p_2, q_0 \rangle}{\langle q_0, q_0 \rangle} q_0 \tag{3}$$

Wir rechnen nach, dass $\langle p_1, q_0 \rangle = -1 + 0 + 1 = 0 \Rightarrow q_1 = p_1 : x \mapsto x$. Da $\langle p_2, q_1 \rangle = -1 + 0 + 1 = 0$, $\langle p_2, q_0 \rangle = 1 + 0 + 1 = 2$ und $\langle q_0, q_0 \rangle = 1 + 1 + 1 = 3$, es folgt, dass $q_2 = p_2 - \frac{2}{\langle q_0, q_0 \rangle} q_0 = p_2 - \frac{2}{3} p_0 : x \mapsto x^2 - \frac{2}{3}$. Wir erhalten also die paarweise orthogonalen Vektoren

$$q_0 : x \mapsto 1, \quad q_1 : x \mapsto x, \quad q_2 : x \mapsto x^2 - \frac{2}{3}.$$

Um eine Orthonormalbasis r_0, r_1, r_2 zu erhalten, normalisieren wir die Vektoren q_0, q_1, q_2 :

$$\|q_0\|^2 = \langle q_0, q_0 \rangle = 3$$

$$\|q_1\|^2 = \langle q_1, q_1 \rangle = 2$$

$$\|q_2\|^2 = \langle q_2, q_2 \rangle = 2 \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{2}{3}$$

Also erhalten wir die Orthonormalbasis:

$$r_0 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad r_1 : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{2}}, \quad r_2 : x \mapsto \frac{x^2 - 2/3}{\sqrt{2/3}}.$$

Aufgabe 3 (Äquivalenznormalform)

Beweisen Sie Satz 6.1.1 aus der Vorlesung:

Satz 6.1.1. Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Sei K ein Körper und $A \in K^{m \times n}$. Dann existieren $G \in GL(m, K)$, $H \in GL(n, K)$ und $p \in \{0, \dots, \min(m, n)\}$, sodass

$$A = G \cdot \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot H$$

mit $\begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$ und $E_p \in K^{p \times p}$ die Einheitsmatrix.

Lösung 3

Fall 1 $A = 0$. Dann gilt die Aussage offenbar mit z.B. $G = E_m, H = E_n$, und $p = 0$

Fall 2 $A \neq 0$. Dann hat A mindestens einen Eintrag $a_{ij} \neq 0$.

Fall 2.1 Falls $a_{11} \neq 0$, können wir Lemma 6.1.1 anwenden und finden eine invertierbare Matrix G_1 und eine Matrix $\hat{A} \in K^{(m-1) \times (n-1)}$ mit

$$A = G_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & \hat{A} & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \cdot H_1$$

Fall 2.2 Falls $a_{11} = 0$, bringen wir zuerst den Eintrag $a_{ij} \neq 0$ zur Position oben links mittels EZU und ESU:

$$\begin{aligned} A' &= S_{i1} \cdot A \cdot S_{j1} \quad \text{mit } a'_{1,1} = a_{ij} \\ \iff A &= (S_{i1})^{-1} \cdot A' \cdot (S_{j1})^{-1} \\ &= S_{i1} \cdot A' \cdot S_{j1} \\ &\stackrel{\text{Fall 2.1}}{=} S_{i1} \left(G_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & \hat{A} & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \cdot H_1 \right) S_{j1} \end{aligned}$$

Nun können wir diesen Verfahren auf die Matrix $\hat{A}$ anwenden, und zwar so lange, bis wir auf die Nullmatrix kommen; spätestens terminiert das Algorithmus nach $\min(m, n)$ Schritten.